

第1章 章末問題 解答

1.1

(1-1) 式より, $\nu = \frac{c}{\lambda}$, $E = h\nu$ の関係を用いる。

光速を $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m}$, プランク定数を $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}^{-1}$ とすると,
紫外光 ($\lambda = 250 \text{ nm}$) のとき

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{250 \times 10^{-9} \text{ m}} = 1.20 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \\ E &= (6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}) \times (1.20 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}) = 7.95 \times 10^{-19} \text{ J}\end{aligned}$$

となる。同様に

可視光 ($\lambda = 500 \text{ nm}$) のとき

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{500 \times 10^{-9} \text{ m}} = 6.00 \times 10^{14} \text{ s}^{-1} \\ E &= (6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}) \times (6.00 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}) = 3.97 \times 10^{-19} \text{ J}\end{aligned}$$

赤外光 ($\lambda = 4 \mu\text{m}$) のとき

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{4.00 \times 10^{-6} \text{ m}} = 7.50 \times 10^{13} \text{ s}^{-1} \\ E &= (6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}) \times (7.50 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}) = 4.97 \times 10^{-20} \text{ J}\end{aligned}$$

となる。

光速を $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m}$, プランク定数を $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}^{-1}$ とすると,
波長 250 nm の光子の振動数とエネルギーはそれぞれ $\nu = 1.20 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$, $E = 7.96 \times 10^{-19} \text{ J}$ となり, 物理定数の桁をどこまで取るか, あるいは, 解答途中の計算結果をどの桁で四捨五入するかによって, 答えの数値が少し変わるが, 解答の本質ではないので気にしなくてもよい。

また, 振動数およびエネルギーが波長に反比例することを用いると, 与えられた波長の比が $250 : 500 : 4000 = 1 : 2 : 16$ なので, $\lambda = 250 \text{ nm}$ の光子の振動数およびエネルギーを 1 とすると, $1 : 1/2 : 1/16$ となるとして, 求めても良い。

1.2

光子のエネルギーは波長に反比例する。波長 700 nm は 400 nm の 1.75 倍であるので, 逆に波長 400 nm の光子のエネルギーは波長 700 nm の光子のエネルギーの 1.75 倍となる。

ちなみに, 上の問題 1.1 と同様に求めると, 波長 400 nm の光子のエネルギーは

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}^{-1}) \times (2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})}{400 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4.97 \times 10^{-19} \text{ J}$$

である。

1.3

等速直線運動では (かかった時間) = (距離) ÷ (速さ) なので,

$$t = \frac{1 \text{ m}}{3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 3.33 \times 10^{-9} \text{ s} = 3.33 \text{ ns}$$

1.4

波長 500 nm の光子のエネルギーは

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}^{-1}) \times (3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})}{500 \times 10^{-9} \text{ m}} = 3.978 \times 10^{-19} \text{ J}$$

この値を用いて

$$KE = h\nu - W = (3.978 \times 10^{-19} \text{ J}) - (3.78 \times 10^{-19} \text{ J}) = 1.98 \times 10^{-20} \text{ J} \approx 2.0 \times 10^{-20} \text{ J}$$

が得られる。

1.5

この電子の運動量 p は

$$p = m_e v = (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times (1 \text{ m s}^{-1}) = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg m s}^{-1}$$

(1-3) 式より

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg m s}^{-1}} = 7.28 \times 10^{-4} \text{ m}$$

が得られる。ここで, $1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ の関係を用いた。

1.6

バルマー系列のうち, 2 番目に長い波長 (λ_2) の輝線は主量子数 $n = 4$ の軌道から $n = 2$ の軌道への遷移に対応する。したがって, (1-6) 式より

$$\frac{1}{\lambda_2} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = (1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}) \times 0.1875 = 2.057 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

したがって,

$$\lambda_2 = \frac{1}{2.057 \times 10^6 \text{ m}^{-1}} = 4.86 \times 10^{-7} \text{ m} = 486 \text{ nm}$$

である。同様に, 3 番目に長い波長 (λ_3) の輝線は主量子数 $n = 5$ の軌道から $n = 2$ の軌道への遷移に対応する。したがって,

$$\frac{1}{\lambda_3} = (1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}) \times \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right) = 2.304 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

したがって,

$$\lambda_3 = \frac{1}{2.304 \times 10^6 \text{ m}^{-1}} = 4.34 \times 10^{-7} \text{ m} = 434 \text{ nm}$$

となる。

1.7

$t = 0$ を代入すると,

$$y = \sin\left(-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$t = \tau$ を代入すると,

$$y = \sin\left(2\pi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

となり, 式が一致するので同じ波形となる。

1.8

1次元箱の中の粒子の準位エネルギーは (1-9) 式で与えられる。

n に依存しない定数部分をまとめて A とおくと

$$E_n = \frac{h^2 n^2}{8mL^2} = An^2, \quad A = \frac{h^2}{8mL^2}$$

となる。 $n = 1$ のとき $E_1 = A$ となるので, $A = 2.0 \times 10^{-23} \text{ J}$ である。したがって,

$$n = 2 \quad \text{のとき} \quad E_2 = A \times 2^2 = 4A = 8.0 \times 10^{-23} \text{ J}$$

$$n = 3 \quad \text{のとき} \quad E_3 = A \times 3^2 = 9A = 1.8 \times 10^{-22} \text{ J}$$

となる。

1.9

1次元箱の中の粒子の波動関数の節の数は量子数 n よりも 1 小さい。図に示された波動関数の節の数が 9 なので, 量子数は $n = 10$ である。

1.10

放出された光電子の運動エネルギー KE は

$$KE = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} \times (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times (4.11 \times 10^5 \text{ m s}^{-1})^2 = 7.694 \times 10^{-20} \text{ J}$$

問題 1.1 より, 波長 500 nm の光子のエネルギーは $3.978 \times 10^{-19} \text{ J}$ なので, 仕事関数 W は

$$W = h\nu - KE = (3.978 \times 10^{-19} - 7.694 \times 10^{-20}) \text{ J} = 3.209 \times 10^{-19} \text{ J} \approx 32 \times 10^{-19} \text{ J}$$

と求められる。

$$1 \times 10^{-18} \text{ J} = 6.2415 \text{ eV}$$

なので, eV 単位で表すと 2.0 eV になる。

1.11

(1-3) より

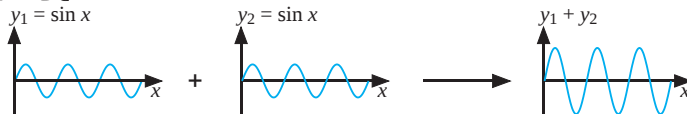
$$p = \frac{h}{\lambda} = mv$$

したがって

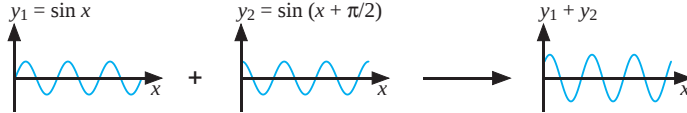
$$m = \frac{h}{\lambda v} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}}{(1 \times 10^{-9} \text{ m}) \times (1 \text{ m s}^{-1})} = 6.63 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

1.12

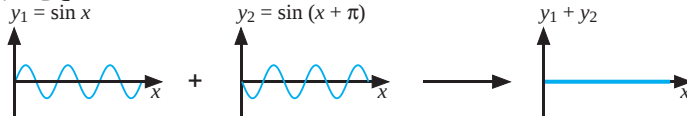
$\delta = 0$ のとき



$\delta = \pi/2$ のとき



$\delta = \pi$ のとき



1.13

(1-4), (1-5) 式から, ライマン系列 (主量子数 n の軌道にある電子が $n = 1$ 軌道へ移る遷移) の輝線の波長 λ はリュードベリ定数 R を用いて

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

と表される。ライマン系列で最も長波長の遷移は $n = 2$ からの遷移になるので,

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}) \times \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) = 8.223 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

となるので, その波長は

$$\lambda = 1.216 \times 10^{-7} \text{ m} = 121.6 \text{ nm}$$

となる。バルマー系列で最も長波長の輝線の波長は例題 **1.3** より 656.3 nm で, ここで求めた波長の 5.40 倍長い。

光子のエネルギーは波長に反比例するので, ライマン系列で最も長波長の輝線に対応する光子のエネルギーはバルマー系列のものの 5.40 倍大きい。

1.14

1次元箱の中の粒子の固有エネルギーは n^2 に比例するので、与えられた3つのエネルギーの平方根の比をとると、量子数の比になるはずである。

$$\sqrt{11.3} : \sqrt{20.0} : \sqrt{31.2} = 3.36 : 4.47 : 5.59 \approx 3 : 4 : 5$$

したがって、3つの準位の量子数はそれぞれ、3, 4, 5である。

1.15

(1-9) 式より、1次元箱 A の中の粒子の固有エネルギーは

$$E_n^A = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}$$

である。一方、1次元箱 B の長さを L_B とすると、1次元箱 B の中の粒子の固有エネルギーは

$$E_n^B = \frac{h^2 n^2}{8(2m)L_B^2}$$

となる。今、各 n において、両方の箱の中の粒子の固有エネルギーが等しいことから

$$\frac{h^2 n^2}{8mL^2} = \frac{h^2 n^2}{8(2m)L_B^2}$$

両辺を比較すると、

$$mL^2 = 2mL_B^2, \quad \therefore L_B = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

であることがわかる。

1.16

1次元箱の中の粒子の波動関数は、(1-10) 式

$$\psi_n(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

で与えられる。波動関数の規格化条件は

$$\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

である。今、(1-10) 式で与えられる波動関数は実数なので、 $|\psi_n(x)|^2 = \psi_n^2(x)$ である。したがって、規格化条件は

$$\begin{aligned} \int_0^L |\Psi_n(x)|^2 dx &= \int_0^L \left\{ \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}^2 dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1 - \cos(2n\pi x/L)}{2} dx \\ &= \frac{2}{L} \frac{1}{2} \left\{ \int_0^L dx - \int_0^L \cos(2n\pi x/L) dx \right\} \end{aligned}$$

である。ここで、右辺の1つめの積分は

$$\int_0^L dx = L$$

である。2つめの積分は積分区間において x が 0 から L まで変化すると $\cos$ 関数の引数が 0 から $2n\pi$ まで変化する。これは $\cos$ 関数を n 周期積分することに対応するが、 $\cos$ 関数は 1 周期積分すると 0 になるので、 n 周期積分してもやはり 0 である。したがって、

$$\int_0^L |\Psi_n(x)|^2 dx = \frac{2}{L} \frac{1}{2} L = 1$$

となり、 n の値によらず規格化条件が成立していることが示される。

1.17

$n = 1$ と $n = 2$ の固有関数をそれぞれ $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ とすると

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

である。どちらも実関数なので、

$$\int_0^L \psi_1(x) \psi_2(x) dx = 0$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\} \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right\} dx \\ &= \frac{2}{L} \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \cos\left(-\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{L} \left\{ \left[-\left(-\frac{\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]_0^L - \left[-\left(-\frac{3\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \right]_0^L \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、直交性を示すことができる。ここで三角関数の公式

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \{ \cos(A - B) - \cos(A + B) \}$$

を用いた。

1.18

求める積分は

$$\langle x \rangle = \int_0^L x \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}^2 dx$$

である。ここで $\theta = n\pi x/L$ とおくと、 $x = \frac{L}{n\pi} \theta$, $dx = \frac{L}{n\pi} d\theta$ となり、積分区間 $x = 0 \rightarrow L$ は $\theta = 0 \rightarrow n\pi$ となる。したがって、求める積分は

$$\langle x \rangle = \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} \frac{L}{n\pi} \theta \sin^2 \theta \frac{L}{n\pi} d\theta = \frac{2L}{n^2 \pi^2} \int_0^{n\pi} \theta \sin^2 \theta d\theta$$

と書き直すことができる。ここで、**1.17** で用いた三角関数の公式を用いると

$$\langle x \rangle = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} \frac{\theta}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{L}{n^2\pi^2} \left\{ \int_0^{n\pi} \theta d\theta - \int_0^{n\pi} \theta \cos 2\theta d\theta \right\}$$

となる。右辺第 1 項の積分は

$$\int_0^{n\pi} \theta d\theta = \left[\frac{1}{2} \theta^2 \right]_0^{n\pi} = \frac{n^2\pi^2}{2}$$

である。右辺第 2 項の積分は部分積分を用いて、

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \theta \cos 2\theta d\theta &= \left[\theta \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta \\ &= 0 - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{n\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

とそれぞれ計算できる。これらの結果を合わせると

$$\langle x \rangle = \frac{L}{n^2\pi^2} \left\{ \frac{n^2\pi^2}{2} + 0 \right\} = \frac{L}{2}$$

となる。この結果は n に依らないので、 $n = 1$ 準位でも $n = 2$ 準位でもどちらも $\langle x \rangle = \frac{L}{2}$ である。

ここでは、計算によって x の平均値 $\langle x \rangle$ を求めたが、図 1.9 に示した粒子の存在確率 $|\psi(x)|^2$ のグラフがいずれも $x = L/2$ に対して左右対称になっていることから、 $\langle x \rangle$ が $L/2$ であることがわかるだろう。